TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN
Fakultät für Wirtschaftswissenschaften

Dresdner Beiträge zu Quantitativen Verfahren

Nr. 30/00

Value-at-Risk-Berechnung durch historische Simulation

von

Stefan Huschens

Value-at-Risk-Berechnung durch historische Simulation

Stefan Huschens*

2. August 2000

Zusammenfassung: Für die Berechnung des Value-at-Risk (VaR) konkurrieren im wesentlichen drei Methoden: die Kovarianzmethode, der Monte-Carlo-Ansatz und die historische Simulation. Ein Vorteil der letzten Methode scheint darin zu bestehen, daß kein spezielles stochastisches Modell unterstellt werden muß. In dieser Arbeit wird zunächst dargelegt, daß das Konzept der historischen Simulation nicht eindeutig ist, so daß verschiedene Varianten zu unterschiedlichen VaR-Größen führen. Unterschieden werden der Portfolio- und der Faktoransatz einerseits und die Raten- bzw. Differenzensimulation andererseits. Es wird klargestellt, welche Modellannahmen erforderlich sind, damit die historische Simulation als ein Verfahren der nichtparametrischen Schätzung interpretiert werden kann.

Summary: Essentially three methods to calculate the Value-at-Risk (VaR) compete: the covariance method, the Monte-Carlo-approach and the method of historical simulation. An advantage of the last method seems to be, that a special stochastic model is not required. In this work is first explained, that the concept of historical simulation is not unique, so that several variants leed to different VaR-meaesures. It is differentiated between the portfolio and the factor approach on the one hand and between simulations based on rates or on differences on the other hand. The assumptions needed for the interpretation of the historical simulation as a non-parametric estimation method are clarified.

Keywords: Historical simulation, Value-at-Risk, market risk.

1 Einführung

Bei der Abschätzung des Value-at-Risk (VaR) wird ein Vorteil der Methode der historischen Simulation im Vergleich zu konkurrierenden Ansätzen wie der Kovarianzmethode oder der Monte-Carlo-Simulation darin gesehen, daß diese anwendbar ist, ohne daß ein spezielles stochastisches Modell unterstellt werden muß. In dieser Arbeit wird dargelegt, daß das Konzept der historischen Simulation nicht eindeutig ist, so daß verschiedene Varianten zu unterschiedlichen VaR-Größen führen. Außerdem wird gezeigt, daß die Ergebnisse der historischen Simulation nur in einem bestimmten Modellrahmen, der für die

*Prof. Dr. Stefan Huschens, Lehrstuhl für Quantitative Verfahren, insbesondere Statistik, Fakultät für Wirtschaftswissenschaften, Technische Universität Dresden, 01062 Dresden; e-mail: stefan.huschens@mailbox.tu-dresden.de, Telefon 0351 463 2343.

einzelnen Varianten unterschiedlich ist, als nichtparametrische Schätzungen interpretiert werden können.

Im einführenden Teil wird zunächst das Value-at-Risk-Konzept im Rahmen der Risikobewertung eines Portfolios eingeführt. Danach werden die Grundidee der historischen Simulation und der bankaufsichtsrechtliche Hintergrund für die Anwendung der historischen im Rahmen der Risikocontrollings dargestellt.

Im zweiten Teil der Arbeit werden Varianten der historischen Simulation dargestellt und verglichen. Dabei werden zunächst der Portfolio- und der Faktoransatz unterschieden. Beim Portfolioansatz werden durch Neubewertung des Portfolios mit historischen Werten der Risikofaktoren alternative Portfoliowerte erzeugt und deren Änderungen extrapoliert. Beim Faktoransatz werden die historischen Änderungen der Risikofaktoren extrapoliert und daraus potentielle Wertänderungen des Portfolios erzeugt. Je nachdem ob man mit absoluten oder relativen Änderungen arbeitet, ergeben sich Berechnungsvarianten, die im allgemeinen zu unterschiedlichen Ergebnissen führen.

Im dritten Teil wird diskutiert, inwieweit die Verfahren der historischen Simulation als nichtparametrische statistische Schätzverfahren interpretiert werden können und damit auch eine statistische Genauigkeitsbeurteilung ermöglichen. Außerdem werden zwei Ansätze diskutiert, die es ermöglichen das Konzept der historischen Simulation auf abhängige Beobachtungen auszudehnen.

1.1 Prognoseverteilung und Value-at-Risk

Der Wert eines Portfolios von Finanzanlagen wird durch verschiedene *Risikofaktoren* beeinflußt, die das Marktrisiko abbilden. Diese Risikofaktoren sind verschiedene Marktpreise (Aktienkurse, Zinssätze, Wechselkurse etc.). Im einfachsten Fall eines Portfolios inländischer Aktien sind die Risikofaktoren die entsprechenden Aktienkurse. In komplizierteren Fällen mit Derivaten, Zins- und Fremdwährungspositionen können die Risikofaktoren auch verschiedene Zinssätze, Wechselkurse, Güterpreise usw. sein.

Betrachtet wird die Entwicklung der Risikofaktoren zu verschiedenen Zeitpunkten

$$t = \ldots, -2, -1, 0, 1, \ldots, k.$$

Der diskrete *Zeitindex* t steht dabei z. B. für Handelstage. $t = 0$ steht für den gegenwärtigen Zeitpunkt und $t = k$ für einen zukünftigen Zeitpunkt, wobei die Verlustpotentiale bis zum Zeitpunkt $t = k$ zu ermitteln sind. Die hauptsächlich interessierenden Zeitpunkte sind $k = 1$ für das Backtestingverfahren und $k = 10$ für VaR-Schätzungen, die als Grundlage für die Bestimmung der Eigenkapitalanforderungen dienen können.

Die Verteilung der potentiellen Verluste wird im folgenden *Prognoseverteilung* genannt. Der Value-at-Risk bestimmt sich dann als ein spezielles Quantil dieser Prognoseverteilung.

Der aktuelle Wert des Portfolios, w_0, hängt über eine Funktion g_0 von J verschiedenen Risikofaktoren ab,

$$w_0 = g_0(z_{0,1}, z_{0,2}, \ldots, z_{0,J}) = g_0(\mathbf{z}_0).$$

Die Risikofaktoren ändern sich typischerweise im Zeitablauf. Daher bezeichnet $z_{t,j}$ den Wert des j-ten Risikofaktors zum Zeitpunkt t. Die J Risikofaktoren werden zum J-

dimensionalen (Spalten-)Vektor

$$\mathbf{z}_t = (z_{t,1}, z_{t,2}, \ldots, z_{t,J})'$$

zusammengefaßt. Mit Kleinbuchstaben werden realisierte, zum Zeitpunkt $t = 0$ bekannte Werte bezeichnet, mit Großbuchstaben werden Größen bezeichnet, die aus der Sicht des Zeitpunktes $t = 0$ Zufallsvariablen sind.

Die Wertänderung eines Portfolios mit konstant gehaltenen Positionen (Mengen), die sich von $t = 0$ nach $t = k$ vollzieht,

$$\Pi_{0,k} = W_k - w_0 = g_k(\mathbf{Z}_k) - g_0(\mathbf{z}_0),$$

kann auf zwei Ursachen zurückgeführt werden: erstens die Änderung von Risikofaktoren, da eine Realisation des Zufallsvektors $\mathbf{Z}_k$ in der Regel von $\mathbf{z}_0$ verschieden ist, und zweitens die Änderung der Bewertungsfunktion von g_0 zu g_k. Die zweite Änderung ist dann relevant, wenn sich Positionen im Portfolio befinden, deren Wert sich im Zeitablauf auch bei konstanten Risikofaktoren ändert (Zeiteffekt durch Verkürzung der Restlaufzeit, Theta-Risiko). Durch die Verkürzung der Restlaufzeit ändert sich z. B. der Wert einer Optionsposition auch bei unveränderten Risikofaktoren.

Bei einem einfachen Portfolio mit J Positionen inländischer Aktien und den konstant gehaltenen Mengen

$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_J)'$$

gilt

$$w_t = \sum_{j=1}^{J} b_j z_{t,j} = \mathbf{b}'\mathbf{z}_t$$

und somit ergibt sich die Wertänderung von $t = 0$ nach $t = k$ als

$$\Pi_{0,k} = W_k - w_0 = \mathbf{b}'(\mathbf{Z}_k - \mathbf{z}_0).$$

In diesem Spezialfall hängt $\Pi_{0,k}$ linear von den zukünftigen Werten der Risikofaktoren ab und es gilt $g_k(\mathbf{z}) = g_0(\mathbf{z}) = \mathbf{b}'\mathbf{z}$.

Zwischen der Anzahl der Portfoliopositionen und der Anzahl der Risikofaktoren besteht im allgemeinen keine zwingende Relation. Die Anzahl der Risikofaktoren kann die Anzahl der Positionen übersteigen. Ein einzelne Position kann beispielsweise ein Zins-, Wechselkurs- und Aktienkursrisiko aufweisen. Die Anzahl der Portfoliopositionen kann aber auch erheblich größer als die Anzahl der Risikofaktoren sein. Ein einfaches Beispiel ist ein Portfolio mit vielen Optionen auf dasselbe Basisinstrument.

Im Rahmen der VaR-Bestimmung wird die Prognoseverteilung für die Wertänderungen, d.h. für den zukünftigen Gewinn, falls $\Pi_{0,k}$ positiv ist, oder Verlust, falls $\Pi_{0,k}$ negativ ist, bzw. ein spezielles Quantil dieser Prognoseverteilung gesucht.

Der VaR zu einer vorgegebenen Prognosewahrscheinlichkeit von 99% kann dann als das mit -1 multiplizierte 1%-Quantil der Verteilung der Wertänderungen bestimmt werden,[1]

$$\mathrm{P}(\Pi_{0,k} < -\mathrm{VaR}) = 1\%.$$

[1]Vorausgesetzt ist, daß dieses Quantil negativ ist. Anderenfalls ist der VaR Null, da es nur mit einer Wahrscheinlichkeit, die kleiner als 1% ist, überhaupt zu Verlusten kommt. Ein VaR von Null ergibt sich für sogenannte VaR-Derivate. Man betrachte z. B. die Stillhalterposition einer Option mit kurzer Restlaufzeit, die so tief im Geld ist, daß die Wahrscheinlichkeit für die Überschreitung des Basispreises unter 1% liegt. Siehe zur Definiton des VaR in Spezialfällen [11].

Betrachtet man die Wertänderung nicht als Nettogewinn, $\Pi_{0,k} = W_k - w_0$, sondern als Nettoverlust, $L_{0,k} = -\Pi_{0,k} = w_0 - W_k$, d. h. Verluste werden durch positive Zahlen gemessen, so wird die Verteilung der Wertänderungen am Nullpunkt gespiegelt und der Value-at-Risk berechnet sich als 99%-Quantil der Prognoseverteilung,[2]

$$\mathrm{P}(L_{0,k} < \mathrm{VaR}) = 99\%.$$

Der VaR ist also nicht eine einzelne Maßzahl zur Charakterisierung des Risikos eines gegebenen Portfolios, sondern variiert mit der vorgegebenen Prognosewahrscheinlichkeit und dem Prognosehorizont.

Von den verschiedenen Ansätzen zur VaR-Bestimmung (siehe [12] für einen Überblick) wird im folgenden nur der Ansatz der historischen Simulation [14, 15] weiterverfolgt, der z. B. in [14, 15] verwendet wird.

1.2 Historische Simulation

Die *Grundidee der historischen Simulation* besteht darin, potentielle Wertänderungen des Portfolios aus den historischen Reihen von Risikofaktoren und der gegebenen Portfoliostruktur zu berechnen. Die relative Häufigkeitsverteilung dieser Wertänderungen wird dann als Prognoseverteilung für die zukünftige Wertänderung verwendet. Die relativen Häufigkeiten der beobachteten Wertänderungen sind nichtnegativ und summieren sich zu Eins. Die relative Häufigkeitsverteilung kann daher als Wahrscheinlichkeitsverteilung der zukünftigen Wertänderung interpretiert werden. Wenn im folgenden von der Verteilung der Wertänderungen oder der Prognoseverteilung gesprochen wird, so ist immer diese relative Häufigkeitsverteilung gemeint.

Der Begriff Simulation ist in diesem Zusammenhang insoweit irreführend als es sich nicht um eine Simulationsmethodik im Sinn der Monte-Carlo-Simulation oder der Simulation dynamischer Systeme handelt. Der Begriff historische Simulation ist andererseits im Bereich der Analyse von Finanzmarktrisiken seit Jahren wohl etabliert und erklärt sich daraus, daß fiktive, potentielle, aber nicht tatsächliche Wertänderungen eines Portfolios generiert werden. Aus statistischer Sicht handelt es sich bei der historischen Simulation eher um ein nichtparametrisches Schätzverfahren. Dieser Zusammenhang wird im dritten Kapitel dieser Arbeit vertieft behandelt.

Eine grundsätzliche Alternative zur Bestimmung des VaR als Quantil der Verteilung der Wertänderungen besteht darin, an die relative Häufigkeitsverteilung der Wertänderungen eine parametrische Verteilung (z. B. eine Normal- oder eine Lognormalverteilung) anzupassen und dann das entsprechende Quantil dieser parametrischen Verteilung als Schätzung des VaR zu verwenden.

1.3 Aufsichtsrechtliche Rahmenbedingungen

Die historische Simulation ist ein zulässiger methodischer Ansatz im Rahmen des Risikocontrolling und der VaR-Bestimmung für bankenaufsichtliche Zielsetzungen. Der siebte

[2]Vorausgesetzt ist, daß das 99%-Quantil der Verlustverteilung positiv ist. Vgl. die vorangegangene Fußnote.

Abschnitt *Eigene Risikomodelle* der *Bekanntmachung über die Änderung und Ergänzung der Grundsätze über das Eigenkapital und die Liquidität der Kreditinstitute vom 29. Oktober 1997* [8] „[...] beinhaltet die Regelungen zur Verwendung bankeigener mathematisch-statistischer Risikomeß- und -steuerungsmodelle. Damit wird die nach den Baseler Marktrisikoregelungen (Anhang B, Tzn. 9 und 10) bestehende Möglichkeit genutzt, den Instituten zu erlauben, statt der Standardmethoden bankintern entwickelte Risikomeß- und -steuerungsmodelle, die im Grundsatztext abkürzend als ‚eigene Risikomodelle' bezeichnet werden, zur Ermittlung der für die Risikopositionen erforderlichen Kapitalunterlegung heranzuziehen." [9, S. 129]. Der Haupttext der *Bekanntmachung* [8] enthält den Begriff der historischen Simulation nicht, vielmehr werden Risikomodelle „[...] mit Hilfe einer *allgemeinen Beschreibung* definiert, die bewußt unspezifisch gehalten wurde, um möglichst viele der verschiedenen, derzeit in der Praxis anzutreffenden Modellierungsverfahren (z. B. historische Simulation, Varianz-Kovarianz-Analyse oder Monte-Carlo-Simulation) abzudecken und mögliche künftige Entwicklungen nicht auszuschließen." [9, S. 169] Die historische Simulation wird außerdem in den *Erläuterungen* erwähnt: „Wenn ein Institut [...] unterschiedliche Risikomodelle (wie Kovarianzmodell, Historische Simulation, Monte-Carlo-Simulation) anwenden will, so ist für jedes dieser Risikomodelle eine gesonderte Eignungsbestätigung erforderlich." [9, S. 164] Ähnlich sind die Formulierungen in den Baseler Marktrisikoregelungen [2, 3, 4, 5]: „[...] können die Banken z. B. Modelle auf der Basis von Varianz-Kovarianz-Matrizes, historischen Simulationen oder Monte-Carlo-Simulationen benutzen." [3, S. 45] Eine klarstellende Ergänzung in den aktuellen *Erläuterungen* [9] erleichtert die Anwendung der historischen Simulation: „Bis auf weiteres ist das Bundesaufsichtsamt damit einverstanden, wenn Institute, die für ihre praktische Risikosteuerung mit Hilfe des Risikomodells eine Haltedauer von nur einem Arbeitstag zugrunde legen, die hieraus ermittelten, der Berechnung der potentiellen Risikobeträge zugrundeliegenden statistischen Werte durch Multiplikation mit dem Faktor 3,16 (Quadratwurzel aus 10) anpassen. Der bei dieser Methode auftretende Fehler gegenüber einer Berechnung auf der Basis tatsächlicher Zehntageszeiträume wird vorerst hingenommen." Diese Klarstellung hat weitreichende Bedeutung für die Einsatzmöglichkeit der historischen Simulation, da dadurch Doppelberechnungen für den 1-Tages- und 10-Tages-Horizont unnötig werden.

Beim Einsatz der historischen Simulation ergeben sich somit drei Varianten bei der Bestimmung des VaR für bankaufsichtliche Zwecke:

- Der aus Tagesverlusten ermittelte VaR-Betrag wird mit dem Faktor 3,16 multipliziert,
  $$\mathrm{VaR}_{(10)} = 3,16 * \mathrm{VaR}_{(1)}.$$
- Die für den 1-Tages-Horizont ermittelte Verteilung potentieller Verluste wird durch eine Normalverteilung mit dem Mittelwert $m_{(1)}$ und der Standardabweichung $s_{(1)}$ approximiert. Der Mittelwert dieser Verteilung wird mit 10 multipliziert,
  $$m_{(10)} = 10 * m_{(1)},$$
  und die Standardabweichung $s_{(1)}$ dieser Verteilung wird mit 3,16 multipliziert,
  $$s_{(10)} = 3,16 * s_{(1)},$$
  um die entsprechenden Parameter $m_{(10)}$ und $s_{(10)}$ einer Verteilung für den 10-Tages-Horizont zu erhalten. Aus diesen ergibt sich dann der VaR für den 10-Tageshorizont

als

$$\mathrm{VaR}_{(10)} = 2,326 * s_{(10)} - m_{(10)}.$$

- Es wird eine Doppelberechnung, d. h. die historische Simulation mit 1-Tages- und 10-Tages-Verlusten, durchgeführt.

Zu berücksichtigen ist allerdings, daß es sich bei den Skalierungsregeln nur um eine Übergangsregelung handeln kann, wenn man den Anforderungen des *Basler Ausschuss für Bankenaufsicht* gerecht werden will: „Damit der Aufwand für die Banken nicht zu gross wird, dürfen sie die VAR-Messgrössen herauf- oder herabskalieren, um zu der geforderten Haltedauer von 10 Tagen zu gelangen. ... Das eigentliche Ziel, das die Banken mit der Zeit erreichen müssen, bleibt im übrigen unverändert, nämlich die Messung der Nichtlinearität mittels eines Preisschocks in einem Zeitraum von 10 Tagen mit vollständiger Neubewertung der Positionen, wobei allerdings hinsichtlich der anzuwendenden Verfahren eine gewisse Flexibilität gewahrt bleibt.“ [4, S. 5] „Es wird von den Banken erwartet, dass sie mit der Zeit zu der Anwendung eines vollen 10-tägigen Preisschocks auf die Optionspositionen oder Positionen mit optionsähnlichen Merkmalen übergehen.“ [2, S. 46]

Für Zwecke des internen Risikocontrolling sind der 1-Tages-Prognose-Horizont, aber auch langfristigere Prognosehorizonte auch dann von Interesse, falls für aufsichtrechtliche Zwecke der 10-Tages-Prognose-Horizont verwendet wird. Die folgenden Ausführungen sind daher so allgemein gehalten, daß sie den Fall verschiedener Prognosehorizonte abdecken.

Die Relevanz der obigen Ausführungen zu den aufsichtsrechtlichen Rahmenbedingungen ist nicht auf den Bereich der Kreditinstitute beschränkt, da die dort entwickelten Methoden und Risikomodelle auch für andere Unternehmen wegweisend sind, die in größerem Ausmaß auf das Controlling von Finanzmarktrisiken angewiesen sind.

2 Alternative Ansätze der historischen Simulation

Im folgenden werden verschiedene Ansätze der historischen Simulation dargestellt. Diesen ist gemeinsam, daß sie auf historischen Reihen für die Risikofaktoren basieren und zu einer Verteilung von Wertänderungen führen, die als simulierte zukünftige Wertänderungen interpretiert werden. Sie unterscheiden sich aber in der speziellen Art, wie Änderungen definiert und berechnet werden.

Grundsätzlich unterschieden werden können ein *Portfolioansatz* und ein *Faktoransatz* der historischen Simulation. Beim Portfolioansatz werden Wertänderungen des Portfolios aus fiktiven Werten des gesamten Portfolios berechnet, die durch eine Neubewertung des Portfolios mit historischen Preisen ermittelt werden. Beim Faktoransatz werden potentielle Änderungen der Risikofaktoren aus den historischen Änderungen der Risikofaktoren simuliert. Daraus wird eine Verteilung der Riskofaktoren für $t = k$ erzeugt und aus dieser ergeben sich die Wertänderungen des Portfolios.

Berechnungsvarianten ergeben sich aus der alternativen Verwendung absoluter oder relativer Änderungen von Risikofaktoren (beim Faktoransatz) oder von Portfoliowerten (beim Portfolioansatz). Es können die historischen *absoluten* Änderungen (Differenzen) eines Risikofaktors verwendet werden, um von diesen auf eine zukünftigen *absolute* Änderung des

Risikofaktors zu schließen. Dieses Verfahren wird im folgenden als *Differenzensimulation* bezeichnet. Oder es werden die historischen relativen Änderungen verwendet, um aus diesen zunächst zukünftige relative Änderungen zu simulieren. Aus diesen relativen Änderungen ergeben sich durch Multiplikation mit dem aktuellen Niveau simulierte zukünftige absolute Änderungen. Dieses Verfahren wird im folgenden als *Ratensimulation* bezeichnet.

Beim Faktoransatz kann einheitlich für alle Risikofaktoren entweder die Differenzen- oder die Ratensimulation durchgeführt werden. Es ist auch denkbar, für einen Teil der Risikofaktoren die absoluten Änderungen und für einen anderen Teil der Risikofaktoren die relativen Änderungen zu extrapolieren. Beim Portfolioansatz ergeben sich zwei Varianten, je nachdem, ob nach einer Neubewertung mit historischen Reihen der Risikofaktoren die Differenzen- oder die Ratensimulation durchgeführt wird. Diese Ansätze führen im allgemeinen zu unterschiedlichen Verteilungen für die zukünftigen Wertänderungen und damit zu unterschiedlichen VaR-Schätzungen. Nur im Fall einer sehr einfachen linearen Portfoliostruktur führen der Portfolio- und der Faktoransatz zu gleichen Ergebnissen, falls ausschließlich die Differenzensimulation verwendet wird.

Ansätze historischer Simulation				
Portfolioansatz		Faktoransatz		
Differenzen–simulation	Raten–simulation	Differenzen–simulation	Raten–simulation	gemischter Ansatz

Tabelle 1: *Übersicht über Ansätze historischer Simulation*

2.1 Portfolio- und Faktoransatz

Der *Portfolioansatz* der historischen Simulation in Verbindung mit Differenzensimulation wird z. B. von [16, 17] verwendet. Um den Portfolioansatz einsetzen zu können, muß eine im Zeitablauf konstante Abhängigkeit des Portfoliowertes von den Risikofaktoren, d. h.

$$g_k = g_0 = g,$$

vorausgesetzt werden. Der Portfolioansatz basiert auf einer *Neubewertung des Portfolios mit historischen Werten der Risikofaktoren.* Die $\mathbf{z}_t$ für $t < 0$ führen zu den fiktiven Portfoliowerten

$$w_t = g(\mathbf{z}_t), \qquad t = \ldots, -2, -1.$$

Diese Portfoliowerte sind insofern fiktiv, als unveränderte Portfoliopositionen für die Vergangenheit unterstellt werden. Aus der so erzeugten historischen Reihe von Portfoliowerten können absolute oder relative Änderungen des Portfoliowertes bestimmt werden. Aus diesen Änderungen kann ausgehend von dem aktuellen Portfoliowert w_0 eine Prognoseverteilung für die zukünftige Wertänderung bestimmt werden.

Dazu werden bei der *Differenzensimulation* die Differenzen aus Portfoliowerten, die jeweils k Perioden auseinanderliegen,

$$\Delta_k w_t = w_t - w_{t-k}, \quad t = -(n-1), \ldots, -1, 0,$$

1. Berechne die fiktiven Portfoliowerte

$$w_t = g(\mathbf{z}_t), \qquad t = -(n-1)-k, \ldots, -2, -1.$$

2. Berechne

   - im Fall der *Differenzensimulation* die absoluten Wertänderungen

   $$\pi^i_{0,k} = \Delta_k w_{-(n-i)}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

   - *oder* im Fall der *Ratensimulation* zunächst die relativen Wertänderungen

   $$\mathcal{R}_k w_t = \frac{w_t - w_{t-k}}{w_{t-k}}, \qquad t = -(n-1), \ldots, -1, 0$$

   und aus diesen die absoluten Wertänderungen

   $$\pi^i_{0,k} = (1 + \mathcal{R}_k w_{-(n-i)})w_0 - w_0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

3. Die so berechneten n potentiellen Wertänderungen

$$(\pi^1_{0,k}, \pi^2_{0,k}, \ldots, \pi^n_{0,k})$$

bilden die Prognoseverteilung für die zukünftige Wertänderung $\Pi_{0,k}$.

Tabelle 2: *Schematische Darstellung des Portfolioansatzes*

als potentielle zukünftige Wertänderungen des Portfolios interpretiert. Diese bilden die Prognoseverteilung für die zukünftige Wertänderung

$$\Pi_{0,k} = W_k - w_0,$$

die zum Zeitpunkt $t = 0$ unbekannt ist. Bei der *Ratensimulation* werden anstelle der absoluten Änderungen die historischen Änderungsraten

$$\mathcal{R}_k w_t = \frac{w_t - w_{t-k}}{w_{t-k}},$$

bestimmt. Eine Prognoseverteilung für die zukünftige Wertänderung erhält man dann aus den n potentiellen Wertänderungen

$$(1 + \mathcal{R}_k w_t)w_0 - w_0, \qquad t = -(n-1) \ldots, -1, 0.$$

Bei der Ratensimulation kann man auch mit stetigen Änderungsraten rechnen. Wenn man, ausgehend von w_{t-k}, eine Änderung nach t mit der stetigen Rate

$$\Delta_k \ln(w_t) = \ln(w_t) - \ln(w_{t-k}) = \ln\left(\frac{w_t}{w_{t-k}}\right)$$

unterstellt, erhält man

$$w_t = e^{\Delta_k \ln(w_t)} w_{t-k} = \frac{w_t}{w_{t-k}} w_{t-k} = (1 + \mathcal{R}_k w_t) w_{t-k}.$$

Da letztlich nur die Quotienten w_t/w_{t-k} eine Rolle für die Bestimmung der Prognoseverteilung spielen, sind die Berechnungswege über die stetigen und die diskreten Änderungsraten äquivalent.

Unterschiedliche Größen der Portfoliowerte beruhen beim Portfolioansatz ausschließlich auf Änderungen der Risikofaktoren bei konstanten Mengen. Dies bedeutet eine Einschränkung des Anwendungsbereiches des Portfolioansatzes, da Derivatpositionen nur in grober Näherung unter Vernachlässigung des Theta-Risikos berücksichtigt werden können.

Der *Faktoransatz* in Verbindung mit Differenzensimulation für alle Risikofaktoren wird z. B. in [18] dargestellt. Die zukünftige Wertänderung

$$\Pi_{0,k} = W_k - w_0 = g_k(\mathbf{Z}_k) - w_0$$

hängt von der zum Zeitpunkt $t = 0$ unbekannten zukünftigen Größe der Risikofaktoren ab. Für den unbekannten Vektor $\mathbf{Z}_k$ werden auf der Basis historischer Werte der Risikofaktoren *n potentielle zukünftige Werte* $\mathbf{z}_k^i$ $(i = 1, \ldots, n)$ erzeugt. Aus diesen potentiellen Risikofaktoren erhält man *n potentielle Portfoliowerte* $g_k(\mathbf{z}_k^i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ und *n potentielle Wertänderungen*

$$\pi_{0,k}^i = g_k(\mathbf{z}_k^i) - w_0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Zur Bestimmung der $\mathbf{z}_k^i$ kann die Differenzen- oder die Ratensimulation eingesetzt werden. Bei der *Differenzensimulation* werden für einen Risikofaktor die n historischen Differenzen

$$\Delta_k z_{t,j} = z_{t,j} - z_{t-k,j}, \quad t = -(n-1), \ldots, -1, 0,$$

als potentielle zukünftige Änderungen dieses Risikofaktors aufgefaßt. Die Änderung des j-ten Risikofaktors

$$\Delta_k z_{k,j} = z_{k,j} - z_{0,j}$$

ist zum Zeitpunkt $t = 0$ unbekannt und wird durch die historischen Änderungen dieses Risikofaktors geschätzt. Somit sind n potentielle zukünftige Risikofaktoren durch

$$z_{k,j}^i = z_{0,j} + \Delta_k z_{-(n-i),j}, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

gegeben. Bei der *Ratensimulation* werden die historischen Änderungsraten des j-ten Risikofaktors

$$\mathcal{R}_k z_{t,j} = \frac{z_{t,j} - z_{t-k,j}}{z_{t-k,j}}, \quad t = \ldots, -2, -1, 0,$$

als potentielle Werte für die zukünftige Änderungsrate

$$\mathcal{R}_k z_{k,j} = \frac{z_{k,j} - z_{0,j}}{z_{0,j}}$$

interpretiert, so daß man n potentielle zukünftige Risikofaktoren aus

$$z_{k,j}^i = z_{0,j}(1 + \mathcal{R}_k z_{-(n-i),j}), \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

1. Berechne für $j = 1, \ldots, J$
   - im Fall der *Differenzensimulation* die historischen Differenzen
   $$\Delta_k z_{t,j} = z_{t,j} - z_{t-k,j}, \qquad t = -(n-1), \ldots, -1, 0$$
   und die potentiellen zukünftigen Risikofaktoren
   $$z_{k,j}^i = z_{0,j} + \Delta_k z_{-(n-i),j}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$
   - im Fall der *Ratensimulation* die historischen Änderungsraten
   $$\mathcal{R}_k z_{t,j} = \frac{z_{t,j} - z_{t-k,j}}{z_{t-k,j}}, \qquad t = -(n-1), \ldots, -1, 0$$
   und die potentiellen zukünftigen Risikofaktoren
   $$z_{k,j}^i = z_{0,j}(1 + \mathcal{R}_k z_{-(n-i),j}), \qquad i = 1, \ldots, n.$$
2. Berechne für $i = 1, \ldots, n$ aus dem Vektor potentieller Risikofaktoren $\mathbf{z}_k^i$ den potentiellen Portfoliowert $g_k(\mathbf{z}_k^i)$ und die potentielle Wertänderung
   $$\pi_{0,k}^i = g_k(\mathbf{z}_k^i) - w_0.$$
3. Die so berechneten n potentiellen Wertänderungen
   $$(\pi_{0,k}^1, \pi_{0,k}^2, \ldots, \pi_{0,k}^n)$$
   bilden die Prognoseverteilung für die zukünftige Wertänderung $\Pi_{0,k}$.

Tabelle 3: *Schematische Darstellung des Faktoransatzes*

erhält.

Im allgemeinen führen Faktor- und Portfolioansatz zu unterschiedlichen Ergebnissen. Beide Ansätze führen aber zu denselben potentiellen Portfoliowertänderungen im Spezialfall eines linearen Portfolios in Kombination mit der Differenzensimulation. Ein Portfolio heißt *linear* in den Risikofaktoren, wenn sich der Portfoliowert für alle Zeitpunkte t als

$$w_t = \mathbf{b}'\mathbf{z}_t$$

mit demselben konstanten Vektor $\mathbf{b}$ darstellen läßt. Für ein lineares Portfolio ergeben sich mit dem Faktor- und dem Portfolioansatz *dieselben potentiellen Wertänderungen*, wenn in beiden Fällen die Differenzensimulation eingesetzt wird. Diese Aussage ergibt sich unmittelbar aus der Umformung

$$\begin{aligned} \pi_{0,k}^i &= \mathbf{b}'\mathbf{z}_{-(n-i)} - \mathbf{b}'\mathbf{z}_{-(n-i)-k} \\ &= \mathbf{b}'(\mathbf{z}_0 + \Delta_k \mathbf{z}_{-(n-i)}) - \mathbf{b}'\mathbf{z}_0. \end{aligned}$$

Die erste Zeile gibt an, wie beim Portfolioansatz aus den Differenzen der Portfoliowerte die potentiellen Wertänderungen $\pi^i_{0,k}$ entstehen. Die zweite Zeile bildet den Berechnungsmodus des Faktoransatzes ab.

Der Spezialfall eines linearen Portfolios zusammen mit Differenzensimulation ermöglicht eine besonders einfache Berechnung, wenn man den Zusammenhang

$$\pi^i_{0,k} = \mathbf{b}'\Delta_k \mathbf{z}_{-(n-i)}$$

berücksichtigt. Mit diesem Zusammenhang lassen sich Portfoliowertänderungen rechentechnisch in einem vereinfachten Berechnungsverfahren direkt aus den Änderungen der Risikofaktoren berechnen.

1. Berechne die historischen Differenzen

$$\Delta_k \mathbf{z}_{-(n-i)} = \mathbf{z}_{-(n-i)} - \mathbf{z}_{-(n-i)-k}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

und die potentiellen Wertänderungen

$$\pi^i_{0,k} = \mathbf{b}'\Delta_k \mathbf{z}_{-(n-i)}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

2. Die so berechneten n potentiellen Wertänderungen

$$(\pi^1_{0,k}, \pi^2_{0,k}, \ldots, \pi^n_{0,k})$$

bilden die Prognoseverteilung für die zukünftige Wertänderung $\Pi_{0,k}$.

Tabelle 4: *Berechnungsverfahren für ein lineares Portfolio und Differenzensimulation*

Es ist also in diesem Fall weder, wie beim Portfolioansatz, erforderlich, das Portfolio mit historischen Preisen neuzubewerten, noch, wie beim Faktoransatz, alternative potentielle zukünftige Risikofaktoren zu berechnen.

Auch wenn dieses einfache Vorgehen sehr attraktiv ist, so ist doch die starke Einschränkung durch die lineare Portfoliostruktur zu berücksichtigen. Mit einem linearen Portfolio lassen sich weder komplexere Zinsinstrumente, noch solche Fremdwährungspositionen erfassen, bei denen ein Wechselkursrisiko mit einem Preisrisiko zusammenfällt. Fremdwährungspositionen, die vom Devisenkurs und von in ausländischer Währung notierten Preisen abhängen. Auch Optionen und andere Derivate, deren Preise von den Preisen der Basisinstrumente und weiteren Zinssätzen abhängen, führen zu einem nichtlinearen Portfolio.[3]

Für ein nichtlineares Portfolio oder bei Ratensimulation führen der Faktor- und der Portfolioansatz im allgemeinen nicht zur gleichen Prognoseverteilung für die Wertänderung.

[3] Bei einer reinen Devisenposition (z. B. 1000 [FF]) hängt die Einordnung des Portfolios als linear oder nichtlinear davon ab, ob der Wechselkurs in der Form „inländische Währungseinheiten pro ausländische Währungseinheit“ (w[DM/FF]) oder ob der inverse Wechselkurs „ausländische Währungseinheiten pro inländische Währungseinheit“ (w'[FF/DM]) betrachtet wird. Im ersten Fall ergibt sich der DM-Wert der Position als 1000 w [DM]. Im zweiten Fall hängt die in DM bewertete Position nichtlinear vom Wechselkurs w' ab, da der DM-Wert der Position $1000/w'$ [DM] ist.

2.2 Vergleich von Differenzen- und Ratensimulation

Differenzen- und Ratensimulation führen zu unterschiedlichen Prognoseverteilungen und damit zu unterschiedlichen Schätzwerten für den VaR. Dies gilt bereits im einfachsten Fall eines Portfolios, das nur aus einer Aktienposition besteht. Die sich hieraus ergebende Frage nach der richtigen Vorgehensweise kann nicht theoretisch beantwortet werden, sondern hängt von der Modellierung der Risikofaktoren und dem empirisch beobachtbaren Verhalten der Risikofaktoren ab. Dort, wo empirisch beobachtbar ist, daß eher die relativen als die absoluten Differenzen einer gemeinsamen Verteilung entstammen, ist die Ratensimulation der Differenzensimulation vorzuziehen.

Beim *Portfolioansatz* ist es schwierig zu entscheiden, ob die Differenzen- oder die Ratensimulation sinnvoller ist. Wenn das Portfolio auch negative Positionen enthält, kann der Wert des gesamten Portfolios Null sein oder nahe bei Null liegen, so daß relative Änderungen nicht berechnet werden können oder wenig aussagekräftig sind. Diese Problematik wird bereits daran deutlich, daß auch bei einem sehr einfachen Portfolio konstante relative Änderungen für die einzelnen Risikofaktoren nicht konstante relative Wertänderungen für das gesamte Portfolio zur Folge haben. Beim Portfolioansatz könnte also die Differenzensimulation zu genaueren Ergebnissen als die Ratensimulation auch dann führen, die Entwicklung einzelner Risikofaktoren besser durch Raten- als durch Differenzensimulation erfaßt wird.

Beim *Faktoransatz* ist die Ratensimulation für einen Risikofaktor sinnvoller als die Differenzensimulation, wenn vergangene relative Änderungen der Risikofaktoren als repräsentativ für zukünftige relative Änderungen der Risikofaktoren angesehen werden können. Dagegen ist es problematischer, von vergangenen absoluten Änderungen der Risikofaktoren unmittelbar auf die Verteilung zukünftiger absoluter Änderungen der Risikofaktoren zu schließen. Die empirische Evidenz aus vielen Untersuchungen stärkt die These, daß die relativen Änderungen eher als die absoluten Änderungen durch eine konstante Verteilung beschrieben werden können. Modelle mit der Annahme einer konstanten Verteilung für die relativen, nicht aber für die absoluten Änderungen, fungieren als Standardansatz bei theoretischen Untersuchungen und sind bei der Herleitung der Black-Scholes-Optionspreisformel zugrundegelegt worden. Aus dem Grundmodell der geometrischen Brownschen Bewegung ergibt sich, daß relative Änderungen für disjunkte aufeinanderfolgende gleichlange Zeiträume stochastisch unabhängig und identisch verteilt sind. Aus praktischer Sicht ist es zwar naheliegend, die zukünftige Preisdifferenz unmittelbar aus der Verteilung der vergangenen Preisdifferenzen zu bestimmen. Aber aus theoretischer Sicht läßt sich keine Rechtfertigung dafür geben, einerseits eine konstante Verteilung relativer Änderungen zu unterstellen und andererseits historische Simulationen so durchzuführen, als liege eine konstante Verteilung der absoluten Änderungen vor. Bei der Modellierung von Zinssatzänderungen kann der Differenzenansatz sinnvoller als der Ratenansatz sein, da den absoluten Änderungen eines stetigen Zinssatzes relative Änderungen des intertemporalen Preisverhältnisses entsprechen.

Bei den bisherigen Ausführungen wurde davon ausgegangen, daß die historische Simulation auf historischen Änderungen der Risikofaktoren bzw. der Portfoliowerte und nicht auf historischen Niveaus beruht. Nur am Rande soll bemerkt werden, daß höchst problematisch und theoretisch völlig unbefriedigend ein Vorgehen wäre, bei dem man die historischen Niveaus eines Risikofaktors als Verteilung des zukünftigen Niveaus verwenden würde. Damit würden die typischen zeitlichen Abhängigkeiten und Trends ignoriert, die in jeder historischen Reihe von Risikofaktoren enthalten sind.

3 Zur statistischen Interpretation der historischen Simulation

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß die Prognoseverteilungen, die sich aus den verschiedenen Ansätzen der historischen Simulation ergeben, unter bestimmten Voraussetzungen als statistisch sinnvolle nichtparametrische Verteilungsschätzungen interpretiert werden können.

3.1 Empirische Verteilung

Das gemeinsame statistische Grundmuster der historischen Simulation besteht darin, aus n direkt beobachteten oder aus Beobachtungen berechneten Werten x_1, x_2, …, x_n auf die Verteilung eines zukünftigen, noch unbekannten Wertes X_{n+1} zu schließen. Dabei werden die Beobachtungen $x_1, \ldots, x_n$, aus denen die Verteilung der Zufallsvariablen X_{n+1} zu schätzen ist, als Realisationen von Zufallsvariablen X_1, X_2, …, X_n aufgefaßt. Der Standardkontext für eine statistisch sinnvolle Interpretation liegt dann vor, wenn die $n+1$ Zufallsvariablen X_1, …, X_n, X_{n+1} identisch verteilt sind mit der Verteilungsfunktion F. Dann ist es möglich, die Verteilung von X_{n+1} durch die *empirische Verteilung* der Beobachtungen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zu schätzen. Die empirische Verteilung $\hat{\mathrm{P}}$ ordnet jedem Intervall I die relative Häufigkeit der Beobachtungen zu, die in I liegen,

$$\hat{\mathrm{P}}(X_{n+1} \in I) = \frac{\#\{i|x_i \in I\}}{n}. \tag{3}$$

$\hat{\mathrm{P}}(X_{n+1} \in I)$ ist dann ein Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit $\mathrm{P}(X_{n+1} \in I)$. Dieser Schätzwert ist die Realisation eines unverzerrten (erwartungstreuen) Schätzers, der sich ergibt wenn, man in (3) die Realisationen x_i durch die entsprechenden Zufallsvariablen X_i ersetzt. Für die Intervalle der Form $(\infty, x]$ ergibt sich die *empirische Verteilungsfunktion* $\hat{F}$ an der Stelle x

$$\hat{F}(x) = \frac{\#\{i|x_i \leq x\}}{n} \tag{4}$$

als Schätzwert für

$$F(x) = \mathrm{P}(X_{n+1} \leq x).$$

Um Aussagen über die Genauigkeit der Schätzung machen zu können, muß die Abhängigkeitstruktur der Beobachtungen bekannt sein. Bei stochastischer Unabhängigkeit ist es möglich, auf relativ einfache Art Genauigkeitsaussagen über die Schätzungen zu machen, da dann $n\hat{F}(x)$ einer Binomialverteilung mit den Parametern n und $F(x)$ folgt. Daraus folgt z. B.

$$\mathbf{Var}(\hat{F}(x)) = \frac{F(x)(1-F(x))}{n} \leq \frac{1}{4n}.$$

Bei nichtparametrischer Modellierung bezeichnet man die Funktion $\hat{F}$ auch als *nichtparametrische Verteilungsschätzung* für F.

Um den VaR zu schätzen, ist das α-Quantil der Verteilung von X_{n+1} zu bestimmen, d. h. Q_α mit

$$\mathrm{P}(X_{n+1} \leq Q_\alpha) = \alpha.$$

Ein naheliegender nichtparametrischer Schätzwert für Q_α ist eine entsprechende Stelle $\hat{Q}_\alpha$ der empirischen Verteilung. Praktisch bedeutet dies, aus den geordneten Beobachtungen

$$x_{1:n} \leq x_{2:n} \leq \ldots \leq x_{n:n}$$

$\hat{Q}_\alpha$ so zu bestimmen, daß möglichst genau $100\alpha\%$ der Beobachtungen links von $\hat{Q}_\alpha$ und $100(1-\alpha)\%$ der Beobachtungen rechts von $\hat{Q}_\alpha$ liegen. In der Regel ist eine solche Stelle nicht eindeutig. Ist beispielsweise ein Schätzwert für $Q_{0.01}$ aus 250 voneinander verschiedenen Beobachtungswerten

$$x_{1:250} < x_{2:250} < \ldots < x_{249:250} < x_{250:250}$$

gesucht, so liegen drei von 250 Beobachtungen links von jeder Stelle x mit $x_{3:250} < x \leq x_{4:250}$, das sind 1,2% der Beobachtungen, und zwei von 250 Beobachtungen liegen links von jeder Stelle x mit $x_{2:250} < x \leq x_{3:250}$, das sind 0,8% der Beobachtungen. Werte in der Nähe von $x_{3:250}$ sind somit plausible Schätzwerte für $Q_{0.01}$. Ein vorsichtiger Schätzwert im Sinne der Risikovorsorge, der das 1%-Quantil eher zu extrem als zu nahe bei Null schätzt, wären der Wert $x_{2:250}$. Verlangt man von einer Schätzung $\hat{Q}_{0.01}$ für das 1%-Quantil $Q_{0.01}$ folgende plausible Eigenschaft: für mindestens 1% der Beobachtungen soll

$$x_i \leq \hat{Q}_{0.01} \tag{5}$$

und gleichzeitig soll für mindestens 99% der Beobachtungen

$$\hat{Q}_{0.01} \leq x_i \tag{6}$$

gelten, dann ergibt sich $\hat{Q}_{0.01} = x_{3:250}$, da (5) für 1,2% der Beobachtungen und (6) für 99,2% der Beobachtungen erfüllt ist.

3.2 Statistische Interpretation des Portfolioansatzes

Um dem Portfolioansatz eine statistische Interpretation zu geben, muß eine Annahme über die Wertänderungen des Portfolios getroffen werden. Zwei alternative Annahmen sind

A1a: Die $\Delta_1 W_t$ $(t = \ldots, -2, -1, 0, 1, \ldots, k)$ sind identisch verteilt.

und

A1b: Die $\mathcal{R}_1 W_t$ $(t = \ldots, -2, -1, 0, 1, \ldots, k)$ sind identisch verteilt.

Aus **A1a** bzw. **A1b** folgt, daß auch die k-periodischen Wertänderungen $\Delta_k W_t$ bzw. $\mathcal{R}_k W_t$ identisch verteilt sind. Die empirische Verteilung der n Wertänderungen $\pi^i_{0,k}$ ist also eine nichtparametrische Schätzung für die Verteilung von $\Pi_{0,k}$, wenn im Fall der Differenzensimulation **A1a** erfüllt ist und wenn im Fall der Ratensimulation **A1b** gilt.

Es ist plausibel, in Ergänzung zu **A1a** die Annahme

A2a: Die $\Delta_1 W_t$ $(t = \ldots, -2, -1, 0, 1, \ldots, k)$ sind stochastisch unabhängig

bzw. in Ergänzung zu **A1b** die Annahme

A2b: Die $\mathcal{R}_1 W_t$ $(t = \ldots, -2, -1, 0, 1, \ldots, k)$ sind stochastisch unabhängig

zu machen.

Die Differenzensimulation führt bei Gültigkeit der Annahmen **A1a** und **A2a** und die Ratensimulation führt bei Gültigkeit der Annahmen **A1b** und **A2b** zu einer nichtparametrischen Schätzung für die Verteilung von $\Pi_{0,k}$, die jeweils auf identisch verteilten Beobachtungen beruht. Im Fall $k = 1$ sind diese außerdem stochastisch unabhängig. Für $k > 1$ sind komplexere Überlegungen anzustellen, da aus **A2a** und **A2b** *nicht* die stochastische Unabhängigkeit der k-Perioden-Wertänderungen $\Delta_k W_t$ bzw. $\mathcal{R}_k W_t$. Z. B. erhält man für $k = 2$ die Korrelation

$$\rho(\Delta_2 W_t, \Delta_2 W_{t-1}) = 1/2,$$

falls die $\Delta_1 W_t, \Delta_1 W_{t-1}, \Delta_1 W_{t-2}$ stochastisch unabhängig und identisch verteilt sind.

Zwar sind die k-Perioden-Änderungen aus disjunkten Zeiträumen, also z. B. $\Delta_k W_t$, $\Delta_k W_{t-k}$, $\Delta_k W_{t-2k}, \ldots$, stochastisch unabhängig. Üblich und – wie die weiteren Überlegungen zeigen werden – auch durchaus richtig ist dagegen die Verwendung der historischen k-Perioden-Änderungen aus sich überlappenden Zeiträumen, also z. B. der Werte $\Delta_k W_t$, $\Delta_k W_{t-1}$, $\Delta_k W_{t-2}, \ldots$. Bei gegebener Anzahl historischer Daten können etwa k-mal soviele k-Perioden-Änderungen aus sich überlappenden Zeiträumen als aus disjunkten Zeiträumen gebildet werden. Durch den größeren Stichprobenumfang ergibt sich insgesamt ein kleinerer Stichprobenfehler der Schätzungen, obwohl die zusätzlichen Beobachtungen nicht unabhängig sind. Allerdings ist es nicht möglich, Genauigkeitsbeurteilungen mit Standardformeln durchzuführen, die auf stochastisch unabhängigen Beobachtungen aufbauen.

Die Annahmen **A1a** und **A2a** bzw. **A1b** und **A2b** implizieren Random-Walk-Darstellungen für die Risikofaktoren. Bei Gültigkeit der Annahmen **A1a** und **A2a** für die absoluten Änderungen kann der Prozeß der W_t in der additiven Random-Walk-Form

$$W_t = W_{t-1} + U_t \tag{7}$$

mit identisch verteilten und stochastisch unabhängigen Zuwächsen U_t geschrieben werden. Bei Gültigkeit der Annahmen **A1b** und **A2b** für die relativen Änderungen kann W_t als multiplikativer Random-Walk-Prozeß

$$W_t = W_{t-1}(1 + U_t) \tag{8}$$

mit identisch verteilten und stochastisch unabhängigen U_t bzw. als additiver Random-Walk-Prozeß für die logarithmierten Variablen,

$$\ln(W_t) = \ln(W_{t-1}) + \ln(1 + U_t), \tag{9}$$

dargestellt werden. Im Fall (7) sind die absoluten Änderungen und im Fall (8) bzw. (9) sind die relativen Änderungen vom Niveau des Prozesses unabhängig. Beide Fälle schließen sich wechselseitig aus.

Die Annahmen für die Wertänderungen folgen nicht ohne weiteres aus analogen Annahmen für die Risikofaktoren. Beispielsweise kann man die absoluten Wertänderungen als Funktion der Änderungen der Risikofaktoränderungen ausdrücken:

$$\Delta_1 W_t = g(\mathbf{Z}_t) - g(\mathbf{Z}_{t-1}) = g(\mathbf{Z}_{t-1} + \Delta_1 \mathbf{Z}_t) - g(\mathbf{Z}_{t-1}).$$

Dies verdeutlicht, daß auch dann, wenn die $\Delta_1 \mathbf{Z}_t$ identisch verteilt sind, die Wertänderungen nicht notwendig identisch verteilt sind, da ein weiterer Einfluß über das sich im Zeitablauf ändernde Niveau $\mathbf{Z}_{t-1}$ der Risikofaktoren besteht. Ebensowenig überträgt sich die stochastische Unabhängigkeit der $\Delta_1 \mathbf{Z}_t$ auf die Wertänderungen. Nur im Fall eines linearen Portfolios gilt

$$g(\mathbf{Z}_{t-k} + \Delta_k \mathbf{Z}_t) - g(\mathbf{Z}_{t-k}) = g(\Delta_k \mathbf{Z}_t),$$

so daß sich die Eigenschaften der Risikofaktoränderungen direkt auf die Wertänderungen übertragen.

Die diskreten relativen Änderungen

$$\mathcal{R}_k w_t = \frac{w_t}{w_{t-k}} - 1$$

sind ebenso wie die logarithmischen Änderungen

$$\Delta_k \ln(w_t) = \ln\left(\frac{w_t}{w_{t-k}}\right)$$

monotone Funktionen der Quotienten w_t/w_{t-k}. Daher ist sind die diskreten relativen Änderungen genau dann identisch verteilt, wenn die logarithmischen Änderungen identisch verteilt sind. Und die diskreten relativen Änderungen sind genau dann stochastisch unabhängig, wenn die logarithmischen Änderungen stochastisch unabhängig sind.

Die Frage, ob **A1a** oder **A1b** eher geeignet ist, die Bewegung des Portfoliowertes zu beschreiben, ist losgelöst von einer speziellen Portfoliostruktur schwierig zu beantworten. Für ein reines Anlageportfolio, das eine ähnliche Bewegung wie eine einzelne Anlage oder ein Aktienindex hat, ist sicherlich **A1b** die geeignete Annahme. Auf der anderen Seite ist die Annahme **A1b** ungeeignet für ein Portfolio mit Short- und Long-Positionen, die sich wertmäßig zu Null ausgleichen, da sich relative Änderungen dann auf diesen Wert beziehen.

3.3 Statistische Interpretation des Faktoransatzes

Im Fall des Faktoransatzes der historischen Simulation wird die Verteilung der zukünftigen Wertänderung indirekt aus den prognostizierten Änderungen der Risikofaktoren ermittelt. Dabei sind die historischen Änderungen der Risikofaktoren direkt beobachtbar und die Wertänderungen des Portfolios werden aus den Änderungen der Risikofaktoren berechnet. Um zu einer statistischen Interpretation dieses Falles zu gelangen, muß ein etwas allgemeinerer Fall der Verteilungsschätzung betrachtet werden. Die Verteilung einer Zufallsvariablen X, die von einem Vektor beobachtbarer Zufallsvariablen $\mathbf{Y}$ funktional abhängt,

$$X = f(\mathbf{Y}),$$

kann folgendermaßen nichtparametrisch geschätzt werden. Für identisch verteilte Zufallsvektoren $\mathbf{Y}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ sind auch die Zufallsvariablen $X_i = f(\mathbf{Y}_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ identisch verteilt. Sind die $\mathbf{Y}_i$ stochastisch unabhängig, dann sind auch die X_i stochastisch unabhängig. Deshalb kann man aus den Beobachtungen $\mathbf{y}_1, \ldots \mathbf{y}_n$ die indirekten Beobachtungen $x_1 = f(\mathbf{y}_1), \ldots, x_n = f(\mathbf{y}_n)$ berechnen und deren empirische Verteilung als Verteilungschätzung für die Verteilung von X verwenden. Beim Faktoransatz steht $\mathbf{Y}$ für den Vektor der Änderungen der Risikofaktoren, von denen der Portfolioverlust funktional abhängt.

Eine statistische Interpretation des Faktoransatzes der historischen Simulation erfordert Annahmen über die Änderungen der Risikofaktoren. Im Fall der Differenzensimulation sind die interessierenden Änderungen des j-ten Risikofaktors

$$\Delta_k Z_{t,j} = Z_{t,j} - Z_{t-k,j}$$

und im Fall der Ratensimulation

$$\mathcal{R}_k Z_{t,j} = \frac{Z_{t,j} - Z_{t-k,j}}{Z_{t-k,j}}.$$

Diese werden zu dem J-dimensionalen Vektor ${}_k\mathbf{Y}_t$ zusammengefaßt, wobei für die j-te Komponente entweder

$${}_kY_{t,j} = \Delta_k Z_{t,j}$$

im Fall der Differenzensimulation oder

$${}_kY_{t,j} = \mathcal{R}_k Z_{t,j}$$

im Fall der Ratensimulation gilt. Um von beobachteten Änderungen der Risikofaktoren auf eine zukünftige Änderung statistisch schließen zu können, ist folgende Annahme erforderlich, die postuliert, daß historische und zukünftige Änderungen der Risikofaktoren jeweils derselben Verteilung entstammen.

A3: Die ${}_1\mathbf{Y}_t$ $(t = \ldots, -2, -1, 0, 1, \ldots, k)$ sind identisch verteilt.

Aus **A3** folgt[4], daß auch die k-Perioden-Änderungen ${}_k\mathbf{Y}_t$ für verschiedene t identisch verteilt sind. Damit ist die empirische Verteilung der beobachteten Risikofaktoränderungen

[4]Es gilt nämlich

$$\Delta_k Z_{t,j} = \sum_{i=1}^{k} \Delta_1 Z_{t-i+1,j}$$

${}_k\mathbf{y}_{-(n-i)}$ $(i = 1, \ldots, n)$ eine nichtparametrische Schätzung für die Verteilung der zukünftigen Änderungen ${}_k\mathbf{Y}_0$. Die empirische Verteilung der potentiellen Risikofaktoren $\mathbf{z}_k^i$, die komponentenweise mit (1) oder (2) berechnet werden, je nachdem, ob Differenzen- oder Ratensimulation durchgeführt wird, ist eine nichtparametrische Schätzung für die Verteilung von $\mathbf{Z}_k$. Schließlich ist die empirische Verteilung der Wertänderungen

$$\pi_{0,k}^i = g_k(\mathbf{z}_k^i) - w_0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

eine nichtparametrische Schätzung für die Verteilung der zukünftigen Wertänderung

$$\Pi_{0,k} = g_k(\mathbf{Z}_k) - w_0.$$

Die Annahme **A3** ist mit jeder Abhängigkeitstruktur zwischen den Risikofaktoränderungen desselben Zeitraumes verträglich. Diese Abhängigkeitstruktur wird allerdings als im Zeitablauf konstant vorausgesetzt.

Um Aussagen über die statistische Genauigkeit der Schätzungen machen zu können, ist es erforderlich, die zeitliche Abhängigkeitsstruktur näher zu spezifizieren. Naheliegend ist die folgende Standardannahme über die täglichen Änderungen der Risikofaktoren.

A4: Die ${}_1\mathbf{Y}_t$ $(t = \ldots, -2, -1, 0, 1, \ldots, k)$ sind stochastisch unabhängig.

Zu beachten ist, daß **A4** keine Einschränkung der Abhängigkeitsstrukur zwischen verschiedenen Risikofaktoränderungen innerhalb einer Periode impliziert, sondern nur etwas über die Abhängigkeitstruktur zwischen verschiedenen Zeitpunkten aussagt. Aus **A4** folgt auch die stochastische Unabhängigkeit der $\mathbf{Z}_1^i$ und der $\Pi_{0,1}^i$. Damit bilden für $k = 1$ die $\pi_{0,1}^i$ $(i = 1, \ldots, n)$ eine nichtparametrische Schätzung für die Verteilung der zukünftigen Wertänderung $\Pi_{0,1}$ auf der Basis von n unabhängigen und identisch verteilten Beobachtungen.

3.4 Abhängige Beobachtungen

Die Beurteilung der historischen Simulation wird weitaus komplizierter, wenn aufeinanderfolgende Änderungen der Renditen nicht mehr als stochastisch unabhängig unterstellt werden können. Die in vielen Finanzmarktreihen beobachtbare Volatilitätsklumpung (volatility clustering) ist der wichtigste Effekt, der nicht mehr mit der Annahme stochastisch unabhängiger und identisch verteilter Änderungen der Risikofaktoren verträglich ist. Um diesen Effekt abzubilden, ist es erforderlich, eine im Zeitablauf variierende bedingte Verteilung zuzulassen, wie z. B. bei der ARCH-Modellierung (ARCH = autoregressive conditional heteroscedasticity; vgl. z.B. [10, 1]). Die bedingten Verteilungen besitzen dabei eine im Zeitablauf variable Varianz mit einer gewissen Persistenz.

Im Falle einer Abhängigkeitsstruktur muß zwischen der bedingten und der unbedingten Verteilung von X unterschieden werden muß. Für die VaR-Schätzung oder allgemeinere

---

und

$$\mathcal{R}_k Z_{t,j} = \prod_{i=1}^{k} (1 + \mathcal{R}_1 Z_{t-i+1,j}) - 1.$$

Risikoabschätzungen interessiert dabei die bedingte, nicht aber die unbedingte[5] Verteilung von X. Die historische Simulation führt in der üblichen oben beschriebenen Form zwar zu einer Schätzung für die unbedingte Verteilung von X, nicht aber zu einer Schätzung für die eigentlich interessierende bedingte Verteilung. Um die bedingte Verteilung zu schätzen, ist das Verfahren erheblich zu modifizieren. Dazu wird im folgenden ein Vorschlag gemacht.

Hängt für jeden Zeitpunkt t die bedingte Verteilung von X_t für gegebene Realisationen $\ldots, x_{t-2}, x_{t-1}$ nur jeweils vom Wert x_{t-1}, nicht aber von t, von x_{t-2} und den früheren Werten ab, so läßt sich folgende Modifikation der historischen Simulation durchführen. Die Prognoseverteilung für X_1 bei gegebenen Beobachtungen $\ldots, x_{-1}, x_0$ ist die Verteilung von X_1 unter der Bedingung $X_0 = x_0$. Eine nichtparametrische Schätzung für die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$\mathrm{P}(X_1 \leq x | x_0 - c \leq X_0 \leq x_0 + c) = \frac{\mathrm{P}\left(X_1 \leq x \text{ und } x_0 - c \leq X_0 \leq x_0 + c\right)}{\mathrm{P}\left(x_0 - c \leq X_0 \leq x_0 + c\right)}$$

auf der Basis von n Beobachtungspaaren (x_{t-1}, x_t) ist

$$\hat{\mathrm{P}}(X_1 \leq x | X_0 - c \leq X_0 \leq X_0 + c) = \frac{\#\{t | x_{t-1} \leq x \text{ und } x_0 - c \leq x_t \leq x_0 + c\}}{\#\{t | x_0 - c \leq x_t \leq x_0 + c\}} .$$

Ein Problem liegt in der Wahl eines geeigneten kleinen Wertes $c > 0$. Einerseits sollte c möglichst klein sein, um die bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathrm{P}(X_1 \leq x | X_0 = x_0)$ gut abzubilden. Andererseits wird die Anzahl der Beobachtungen mit der Eigenschaft $x_0 - c \leq x_t \leq x_0 + c$ um so kleiner, je kleiner c gewählt wird, so daß sich ein negativer Effekt auf die statistische Genauigkeit ergibt.

3.5 Exponentielle Gewichtung

In Anlehnung an den exponentiellen Gewichtungsansatz, der von J. P. Morgan bei der VaR-Schätzung im Kontext parametrischer Modelle propagiert wird (vgl. [14]), wird in [7] ein pragmatischer Ansatz vorgeschlagen, um eine sich im Zeitablauf ändernde Verteilung der Risikofaktoren zu erfassen.

Die empirische Verteilungsfunktion aus n zeitlich geordneten Beobachtungen zu den Zeitpunkten $t = -n, \ldots, -1$ ist analog zu (4)

$$\hat{F}(x) = \frac{1}{n} \sum_{t=-n}^{-1} \hat{F}_t(x)$$

mit

$$\hat{F}_t(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \leq x_t \\ 0 & \phantom{\text{für}} \quad x > x_t \end{cases}$$

Für $0 < \lambda < 1$ erhält man mit $\lambda_1 := (1-\lambda)/(1-\lambda^n)$, $\lambda_2 := \lambda_1 \lambda$, $\ldots$, $\lambda_n := \lambda_{n-1}\lambda$ exponentiell fallende Gewichte, die sich zu Eins addieren. Eine modifizierte nichtparametrische

[5] Für einen stationären stochastischen Prozeß $(X_1, X_2, \ldots, X_t, \ldots)$ besitzen alle X_i diesselbe unbedingte Verteilung (Marginalverteilung). Prozesse, die für Anwendungen relevant sind, müssen außerdem ergodisch sein. Die Ergodizität bedeutet, daß sich diese unbedingte Verteilung aus *einer* Prozeßrealisation, d. h. aus einer konkreten Zeitreihe $(x_1, x_2, \ldots)$, schätzen läßt.

Schätzung für F_0 ist auf der Basis von Beobachtungen zu den Zeitpunkten $t = -n, \ldots, -1$ ist daher

$$\hat{F}_\lambda(x) = \lambda_1 \hat{F}_{-1}(x) + \ldots + \lambda_n \hat{F}_{-n}(x) = \sum_{t=-n}^{-1} \lambda_{-t} \hat{F}_t(x). \tag{10}$$

Für $\lambda \to 1$ gilt $\lambda_i \to 1/n$ für $i = 1, \ldots, n$, so daß $\hat{F}_\lambda$ in diesem Grenzfall in die gewöhnliche empirische Verteilungsfunktion übergeht, bei der die n Beobachtungen gleichgewichtet sind. Für $\lambda \to 0$ erhält die letzte Beobachtung ein immer stärkeres Gewicht.

Als Schätzwert für ein α-Quantil der Verteilung F_0 wird in [7] ein α-Quantil der Verteilungsschätzung $\hat{F}_\lambda$ vorgeschlagen. Die Begründung dieses Ansatzes ist heuristisch. Empirische Anwendungen mit Daten, die offensichtlich zeitabhängige Änderungen der Volatilität aufweisen, zeigen eine Überlegenheit einerseits gegenüber parametrischen Ansätzen mit exponentieller Gewichtung und andererseits gegenüber dem reinen Ansatz der historischen Simulation, vgl. [7]. Eine theoretische Fundierung im Sinn der Angabe einer Klasse stochastischer Prozesse und eines Optimalitätskriteriums, so daß $\hat{F}_\lambda$ aus (10) optimal in der angegebenen Prozeßklasse ist, steht noch aus.

4 Schlußbemerkung

Es wurde gezeigt, daß unter geeigneten Voraussetzungen die Ansätze der historischen Simulation als statistische Schätzverfahren im Sinne der nichtparametrischen Verteilungsschätzung interpretiert werden können. Diese Voraussetzungen sind allerdings für die einzelnen Ansätze unterschiedlich. Die Frage, welche dieser Voraussetzungen „richtig“ oder am besten passend ist, kann nur ansatzweise theoretisch entschieden werden. Letztlich muß auf der Basis empirischer Untersuchungen der Risikofaktoren entschieden werden, ob diese besser durch Differenzen- oder durch Ratensimulation beschrieben werden können. Ob die Portfoliosimulation angewendet werden kann und ob dabei die Raten- oder die Differenzensimulation eher geeignet ist, kann nur durch Simulationsstudien für konkrete Portfolios beantwortet werden.

Literatur

[1] Barone-Adesi, G., Bourgoin, F., Giannopoulos, K.: Don't look back. Risk 11,8 (1998), 100-103.

[2] Basler Ausschuss für Bankenaufsicht: Änderung der Eigenkapitalvereinbarung zur Einbeziehung der Marktrisiken. Basel 1996. (Basle Committee on Banking Supervision: Supplement to the Capital Accord to Incorporate Market Risks.)

[3] Basler Ausschuss für Bankenaufsicht: Aufsichtliches Rahmenkonzept für Backtesting (Rückvergleiche) bei der Berechnung des Eigenkapitalbedarfs zur Unterlegung des Marktrisikos mit bankeigenen Modellen. Basel 1996. (Basle Committee on Banking Supervision: Supervisory Framework for the Use of “Backtesting” in Conjunction with the Internal Models Approach to Market Risk Capital Requirements.)

[4] Basler Ausschuss für Bankenaufsicht: Überblick über die Änderung der Eigenkapitalvereinbarung zur Einbeziehung der Marktrisiken. Basel 1996.

[5] Basle Committee on Banking Supervision: Explanatory Note: Modification of the Basle Capital Accord of July 1988, as amended in January 1996. Basle 1997.

[6] Basle Committee on Banking Supervision: Modification to the market risk amendment. Basle 1997.

[7] Boudoukh, J., Richardson, M., Whitlaw, R.: The best of both worlds. Risk 11,5 (1998), 64-67.

[8] Bundesaufsichtsamt für das Kreditwesen: Bekanntmachung über die Änderung und Ergänzung der Grundsätze über das Eigenkapital und die Liquidität der Kreditinstitute vom 29. Oktober 1997.

[9] Bundesaufsichtsamt für das Kreditwesen: Erläuterungen zur Bekanntmachung über die Änderung und Ergänzung der Grundsätze über das Eigenkapital und die Liquidität der Kreditinstitute vom 29. Oktober 1997.

[10] Engle, R. F. (Hrsg.): ARCH – Selected Readings. Oxford University Press: Oxford 1995.

[11] Huschens, S.: Anmerkungen zur Value-at-Risk-Definition. In: *Datamining und Computational Finance* (Ergebnisse des 7. Karlsruher Ökonometrie-Workshops). Hrsg.: G. Bol, G. Nakhaeizadeh, K.-H. Vollmer, Physica-Verlag, Heidelberg 1999, S. 29-41.

[12] Huschens, S.: Verfahren zur Value-at-Risk-Berechnung im Marktrisikobereich. In: *Handbuch Risikomanagement.* Hrsg.: Johanning, L., Rudolph, B., Uhlenbruch-Verlag, München 2000.

[13] Jorion, P.: Value at Risk: The New Benchmark Controlling Market Risk. Irwin, Chicago 1997.

[14] Morgan Guaranty Trust Company/Reuters Ltd: RiskMetrics – Technical Document. 4th ed. 1996.

[15] RiskMetrics Group: RiskGrades Technical Document. First ed. 2000.

[16] Schulte-Mattler, H., Traber, U.: Benchmark- und Simulationsmethode zur Quantifizierung des Fremdwährungsrisikos. Die Bank 10/95, 626-633.

[17] Schulte-Mattler, H., Traber, U.: Marktrisiko und Eigenkapital. Bankaufsichtliche Normen für Kredit- und Marktrisiken. Gabler, Wiesbaden 1995.

[18] Smithson, C., Minton, L.: Value-at-risk. Understanding the various ways to calculate VAR. Risk 9,1 (1996), 25-27.

[19] Smithson, C., Minton, L.: Value-at-risk (2). The debate on the use of VAR. Risk 9,2 (1996), 38-39.